Über Ringerweiterungen.

Von I. SZÉLPÁL in Szeged.

Nach einem Satz von BAER[1]) gibt es Abelsche Gruppen, die in irgendwelchen Abelschen Gruppen nur als direkter Faktor enthalten werden können. BAER gibt sogar alle diese Gruppen an.

In der Theorie der Ringe[2]) könnte man ähnlich fragen, ob es Ringe R gibt, die nur als direkter Summand in irgendeinem Ring enthalten sein können. Die Antwort fällt im allgemeinen negativ aus, wie das die folgende einfache Bemerkung zeigt. Man betrachte den vollen Matrizenring R_2 über R von Range 4. Die Elemente

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in R)$$

von R_2 bilden einen zu R isomorphen Ring R', der offenbar kein direkter Summand, sogar kein Ideal in R_2 ist, sei es denn, daß R ein Zeroring ist (Zeroring heißt ein Ring, in dem alle Elementenprodukte verschwinden).

Nun kann es vielleicht nicht uninteressant sein, daß man sehr einfach auch weitere Ringe S über R angeben kann, in denen R ebenfalls kein Ideal ist, und dabei auch die Zeroringe keinen Ausnahmefall bilden, so daß dann allgemein gilt der folgende:

Satz 1. *Zu jedem Ring R $(\neq 0)$ gibt es einen Erweiterungsring S, in dem R kein Ideal ist.*

Wir bemerken hierzu, daß der von uns anzugebende Erweiterungsring S gegenüber dem obigen R_2 auch die Eigenschaft hat, daß er für kommutative R ebenfalls kommutativ ist.

Außerdem zeigen wir die folgenden Sätze:

Satz 2. *Zu jedem Ring R gibt es einen Ring S, so daß S zwei zu R isomorphe Ringe enthält, von denen der eine ein Ideal, der andere kein Ideal in S ist.*

Satz 3. *Wir können jeden Ring R auch so in einen Ring S einbetten daß S zwei zu R isomorphe Ringe enthält, von denen keiner ein Ideal in S ist.*

---

1) R. BAER, Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group, *Bulletin American Math. Soc.*, 46 (1940), S. 800—806.

2) Es sind nicht nur kommutative Ringe gemeint.

Wir werden diese Sätze mit direkter Konstruktion beweisen. Um Satz 1 zu beweisen, betrachten wir die Menge S der Tripel (ϱ, m_1, m_2), wobei $\varrho \in R$ gilt und m_1, m_2 ganze Zahlen sind. Wir definieren

$$(\varrho, m_1, m_2) + (\varrho', m_1', m_2') = (\varrho + \varrho', m_1 + m_1', m_2 + m_2'),$$
$$(\varrho, m_1, m_2) \cdot (\varrho', m_1', m_2') =$$
$$= (\varrho\varrho', \ m_1 m_1', \ m_1'\varrho + m_2'\varrho + m_1\varrho' + m_2\varrho' + m_1 m_2' + m_2 m_1' + m_2 m_2').$$

Es ist klar, daß hierdurch S zu einem Ring gemacht wurde. Man sieht auch, daß die Elemente $(\varrho, 0, 0)$ einen zu R isomorphen Unterring in S bilden; deshalb läßt sich R als ein Unterring von S auffassen. Da nun aber mit $\varrho \neq 0$

$$(\varrho, 0, 0)\,(0, 0, 1) = (0, 0, \varrho) \,\bar{\in}\, R$$

gilt, so ist R in der Tat kein Ideal in S.

Zum Beweis von Satz 2 setzen wir in der Menge S der Tripel $(\varrho_1, \varrho_2, m)$ $(\varrho_1, \varrho_2 \in R;$ m ganz rational)

$$(\varrho_1, \varrho_2, m) + (\varrho_1', \varrho_2', m') = (\varrho_1 + \varrho_1', \varrho_2 + \varrho_2', m + m')$$
$$(\varrho_1, \varrho_2, m)\,(\varrho_1', \varrho_2', m') = (\varrho_1\varrho_1', \varrho_1\varrho_2' + m'\varrho_1 + \varrho_2\varrho_1' + \varrho_2\varrho_2' + m'\varrho_2 + m\varrho_1' + m\varrho_2', mm').$$

Wieder ist S ein Ring und die Elemente von der Form $(\varrho, 0, 0)$ und $(0, \varrho, 0)$ bilden je einen zu R isomorphen Unterring R_1, R_2 von S. Da

$$(\varrho, 0, 0)\,(\varrho_1, \varrho_2, m) = (\varrho\varrho_1, \varrho\varrho_2 + m\varrho, 0) \,\bar{\in}\, R_1$$

gilt, so ist R_1 kein Ideal in S

Dagegen gilt

$$(0, \varrho, 0)\,(\varrho_1, \varrho_2, m) = (0, \varrho\varrho_1 + \varrho\varrho_2 + m\varrho, 0) \in R_2$$

weshalb R_2 ein Ideal in S ist.

Der Beweis von Satz 3 entsteht aus dem vorigen durch die kleine Abänderung, daß wir jetzt

$$(\varrho_1, \varrho_2, m)\,(\varrho_1', \varrho_2', m') = (\varrho_1\varrho_1' + \varrho_1\varrho_2', \varrho_2\varrho_1' + \varrho_2\varrho_2', m\varrho_1' + m\varrho_2' + m'\varrho_1 + m'\varrho_2 + mm')$$

setzen[3]). Dann ist S wieder ein Ring mit den zwei Unterringen R_1, R_2 wie zuvor, die aber jetzt wegen

$$(\varrho, 0, 0)\,(\varrho_1, \varrho_2, m) = (\varrho\varrho_1 + \varrho\varrho_2, 0, m\varrho) \,\bar{\in}\, R_1$$
$$(0, \varrho, 0)\,(\varrho_1, \varrho_2, m) = (0, \varrho\varrho_1 + \varrho\varrho_2, m\varrho) \,\bar{\in}\, R_2$$

keine Ideale sind.

Wir bemerken, daß wenn wir uns auf solche Ausgangs- und Erweiterungsringe beschränken, die nur Elemente von endlicher (additiver) Ordnung enthalten, dann gelten diese Sätze nicht mehr. Darauf werden wir an einer anderen Stelle zurückkommen.

(Eingegangen am 1. September 1951.)

---

[3]) Diese drei Konstruktionen sind einfache Beispiele für das schiefe Produkt von L. Rédei. Vgl. L. Rédei: Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie. *Journal f. d. reine und angewandte Math.*, 188 (1950), S. 201—227.